

Midtoets W5, dinsdag 22 januari 2002, 13.15-16.00

(1) U is een deelverzameling van het complexe vlak \mathbb{C} .

(a) Geef de definitie van " U is open en wegsamenhangend (de Engelse term is pathwise connected)".

(b) Geef een voorbeeld van een open verzameling U die niet wegsamenhangend is.

(c) Veronderstel dat U open is en laat x_0 een punt van U zijn. Wanneer zijn twee gesloten wegen γ, δ in U met begin- en eindpunt x_0 homotoop in U ?

(d) Geef de definitie van een enkelvoudig samenhangende (de Engelse term is "simply connected") open deelverzameling U van \mathbb{C} .

(e) Geef een voorbeeld van een open samenhangende U die niet enkelvoudig samenhangend is.

(2) Hoe is de convergentiestraal r van $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gedefiniëerd? Geef machtreeksen F met convergentiestraal r gelijk aan $0, 1, \infty$ respectievelijk.

(3) Bewijs dat de functie $f(z) := \frac{z^2}{z+2}$ analytisch is in een omgeving van $z = 0$ door expliciet de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ te berekenen die in een omgeving van $z = 0$ gelijk is aan $f(z)$. Bereken ook de convergentiestraal van die convergente machtreeks.

(4) Bereken het maximum van $\{|f(z)| \mid 1 \leq |z| \leq 10\}$, waarbij $f(z) := \frac{z-2}{z^3}$.

(5) Bereken de integraal $\int_{\gamma} f(z) dz$, waarbij γ een (positief georiënteerde) cirkel om 0 is met straal 3 en $f(z) := \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1}$. Welke stellingen gebruikt U bij die berekening?

(6) Laat U de open deelverzameling van \mathbb{C} zijn, die verkregen wordt door het weglaten van de negatieve reële as. Geef de formule voor de standaard complexe logaritme $\text{Log}(z)$ op U . Bereken $\text{Log}(-i)$ en i^i .